

文章编号: 1000-8055(2008)08-1466-08

二维扩压叶栅非定常涡面分析

周晓勃, 侯安平, 周 盛

(北京航空航天大学 航空发动机气动热力重点实验室, 北京 100191)

摘 要: 轴流压气机内流动是典型的非定常旋涡流动, 而现有压气机分析设计体系在定常假设下以流场空间结构为对象. 研究压气机内真实流动的途径之一是分析流场时空结构. 把转/静叶片交错排列简化为单叶片排, 再简化成 2-D 扩压叶栅. 从叶栅非定常涡面的角度来描述非定常旋涡流场时空结构. 作为举例, 利用合成射流控制涡面演化, 改善流场时空结构. 此涡面简化模型可为进一步研究叶轮机叶排间干扰复杂流场的时空结构提供分析工具.

关 键 词: 轴流压气机; 非定常旋涡流动; 涡面; 流场时空结构

中图分类号: V211. 15

文献标识码: A

Analysis of unsteady vortex sheet in 2-D axial compressor

ZHOU Xiao-bo, HOU An-ping, ZHOU Sheng

(National Key Laboratory on Aero-Engines,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The flowfield in turbomachinery is characterized by unsteady vortex flow. Contradictorily, the current analysis and design system of axial compressor is based on the spatial structure of the flowfield under the assumption of steady flow. It is understood that one of the methods to investigate the real flow inside the axial compressor is to analyze the temporal-spatial structure of the flowfield. In this paper, an axial compressor stage embedding interlaced rotor and stator rows was simplified into a single blade row, and then further into a 2-D compressor cascade. In this way, the temporal-spatial structure of the unsteady vortex flowfield could be described from the angle of unsteady vortex sheet of the cascade. For illustration, the temporal-spatial structure of the flowfield in cascade was transformed through controlling the evolution of vortex sheet by synthetic jet normal to the suction surface of the cascade. The presented unsteady vortex sheet model could be used as an analysis tool for further research on the temporal-spatial structure of stator/rotor interaction in multi-stage turbomachinery flowfield.

Key words: axial compressor; unsteady vortex flow; vortex sheet;
temporal-spatial structure of flowfield

非定常流动属于当代空气动力学重要前沿方向之一. 现在人们关于分离流和旋涡运动的认识, 还远未达到完全了解的目标, 已有的研究成果也

多局限于定常流动. 对于航空航天和其他工程的需求, 张涵信先生^[1]概括了分离流和旋涡运动的三方面研究内容, 具有指导性和方向性. 其中之一

收稿日期: 2007-07-27; 修订日期: 2007-10-17

基金项目: 国家自然科学基金(10477002)

作者简介: 周晓勃(1977-), 男, 辽宁沈阳人, 博士生, 主要从事叶轮机非定常流动方面的基础研究.

就是关于分离流和旋涡的起始及演化规律和流动机理和研究,这是分离流和旋涡运动进行定量研究和控制利用的基础。对真实流动机理的研究,首先就要认识流场结构。流体力学数百年的发展,使人们基本清楚了定常假设下流场的空间结构;对于真实的非定常流动,则要求人们从流场时空结构的角度进行全面了解,目前在此方面开展的工作还很有限。因此,无论外流还是内流,对流场时空结构研究的重要性和紧迫性都不言而喻。

外流对于流体力学的研究一直走在内流之前,很多研究成果也值得内流学习^[2-3]。但轴流压气机内部流动有其特殊性,远比飞机机翼绕流复杂。首先,由于非惯性转动系的采用,控制流动的 Navier-Stokes 方程中增加了哥氏力作用项;其次,轴流压气机内真实流动属一类典型的“一流场中多个具有相对运动的物体”所引发的非定常旋涡流场^[4],上游相邻叶排的主流区和尾迹区交替扫过,各类旋涡之间以强非线性和非定常性交互作用,使得即使在设计点,叶排通道内流场的时空结构也非常复杂。现代先进轴流压气机气动负荷不断提高,使得流动分离不可避免。分离旋涡从叶片表面不断向下游脱落,与此同时新的旋涡又不断形成。分离旋涡的存在大大加剧了此多频旋涡流场时空结构的复杂性。

与上述轴流压气机内部真实流动矛盾的是,从半个世纪前建立的轴流压气机气动设计体系开始^[5],直到今天仍在使用的很多轴流压气机设计与分析方法^[6],都是基于定常基本假设下,对于流场空间结构讨论。要对压气机内流动模式有更真实的刻画,不断改善其气动性能,提高其结构完整性和可靠性,就必须考虑流动的固有非定常性。针对非定常旋涡流场时空结构进行深入研究。这不仅与航空发动机的性能密切相关,而且也是叶轮机气动热力学乃至流体力学研究的前沿。

如何针对异常复杂的轴流压气机内真实流动时空结构,找到控制和利用非定常流动的一个合理途径?在文献[4]中提出了一个方向:对于尾流撞击效应的研究表明,如果能合理地组织来流尾迹的通过频率和尾迹亏损幅值,对于压气机转子流动时空结构的改善和转子气动性能的提高是很显著的。若能从压气机多叶排涡面相互作用的角度建立非定常涡面模型,分析叶背分离涡面同叶片尾缘脱落涡面相作用所形成尾迹涡面及其对下游叶排流动产生的影响,则有利于对这类非定常旋涡流场时空结构进行研究。本文作为非定常涡

面分析的第一步,先把交错排列的多叶排简化成单叶排,进而再简化到二维扩压叶栅,用涡面模型对其非定常旋涡流场时空结构进行分析。

1 涡面描述

1.1 物理描述

在“理想”无粘流体动力学中,两股来源不同的同种流体在尖缘后相汇合,会产生一个速度间断面^[7]。它有以下 3 个特征:①通过间断面速度有跳跃式的变化,或者大小不同,或者方向不同。②旋涡和间断面是一个整体。此类间断面是涡量集中的区域,可以设想是由许多平行排列的涡丝所组成的一个面,所有涡丝的轴都与代表间断的速度矢量垂直。③这种间断面是不稳定的。对于偶然的干扰,就有强烈的增强曲折的趋势,只是速度差在有些地方增加,有些地方减少。其结果是,间断面破裂成许多通常是不规则的旋涡。这种间断面又被称为自由剪切层,在大 Re 数下,它的无粘极限为面涡。关于自由剪切层稳定性和面涡的演化相互作用,在文献[8-10]中分别都有讨论。当考虑粘性的实际流体时,上述间断面就为流动参数梯度非常大的薄间断层所代替。本文把实际流体中出现的这类速度间断层统一简称为涡面。涡面同时具备上述速度间断面的 3 个特征。

压气机内几何结构复杂,流动物理边界多,空间尺度小,流体粘性不可忽略。即便在设计工况下,轴流压气机内部也是充满着各种尺度旋涡交互作用的非定常流场。这一特征在压气机工作在近失速边界时尤为明显。此时,叶片通道内以中尺度的分离旋涡占主。这种分离通常接近二维分离,因为组成涡面的涡线垂直于当地气流方向,因此形成有损失分离。这种分离是不稳定的,它们受攻角, Ma 的影响很大。本文抓住这一特征,作为初步研究,先不考虑上下游多个涡面间的相互作用,分析限于单独的叶背非定常分离涡面。

1.2 数学描述

根据涡面为切向速度间断层这一物理特征,本文对其仍采用无粘面涡的描述方法^[9],并把涡面中面作为面涡来处理。这里仅给出涡面两侧物理量的关系,详细部分可参考文献[9-10]。

如图 1 所示,对于二维空间涡面 VS ,其左侧和右侧的速度分别为 V^+ 和 V^- ,压强为 p^+ 和 p^- ,他们切向分量之间遵循以下关系

$$V_n^+(\vec{\zeta}) = V_n^-(\vec{\zeta}) \quad (1)$$

$$V_i(\zeta) - V_i^+(\zeta) = \gamma(\zeta) \quad (2)$$

$$p^+ = p^- \quad (3)$$

其中 ζ 是涡面 VS 上一点, γ 是涡面密度, v 是 X 轴和涡面的法向的夹角. 由于流体的法向速度等于涡面运动的法向速度, 所以没有流体物质穿过涡面.

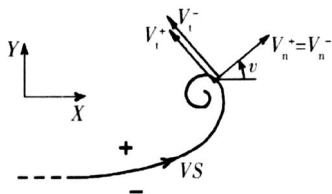


图1 二维涡面示意图

Fig. 1 Schematic of a vortex sheet in 2-D

2 数值方法

2.1 定解问题

本文采用有限差分法离散二维可压非定常雷诺平均 Navier-Stokes 方程组. 三步三阶 TVD Runge-Kutta 法时间推进求解. 无粘项矢通量分裂后, 用三点五阶^[11]高精度广义紧致迎风格式来逼近, 粘性通量采用六阶精度的对称紧致格式^[12]进行离散. 湍流模型采用 Baldwin-Lomax 双层代数模型, 该模型可以合理地预测叶背大尺度分离流动^[2].

研究选用大弯角高负荷叶型 SJ301-20, 以便于产生流动分离, 模拟近失速工况下叶排通道内的流动情形. 叶型具体参数为: 弦长 $C = 80.6$ mm, 稠度 $\tau = 1.5$, 几何进口角 $\beta_K = 41.6^\circ$, 几何出口角 $\beta_K = 1.23^\circ$, 安装角 $\gamma = 19.88^\circ$, 如图2所示. 计算域划分为: 叶栅沿叶排轴向前延伸1倍弦长, 栅后延伸2倍弦长. 采用 H 型网格. 考虑计算精度, 网格点数取 460×99 (轴向 $\times$ 周向), 近壁第一层网格距壁面法向距离小于 7.25×10^{-5} m, $y^+ < 23$. 叶排进口给定总温, 总压和气流角, 静压外推. 出口边界给定背压. 假设每个叶排通道均满足周期性条件. 除了射流出口网格点, 叶片壁面上采用无滑移无穿透条件. 初始条件认为流动是均匀的完全湍流. 本文所有计算都在以下进口条件进行: 弦长雷诺数 $Re = 7.7 \times 10^5$, 马赫数 $Ma = 0.5$.

叶背合成射流网格点处的壁面速度按照方程(4)给出, 其中 V_{ex} 为合成射流的速度幅值, f_e 为合成射流频率, t 为时间. 本文采用法向合成射流, 因此射流方向与壁面切向夹角 $\alpha = 90^\circ$.

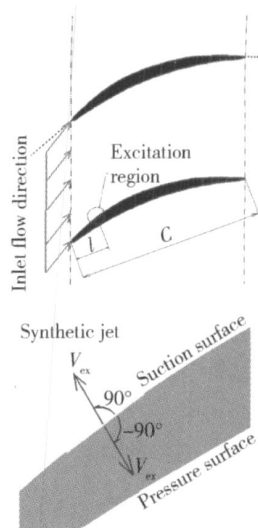


图2 叶型几何和吸力面合成射流方向示意图

Fig. 2 Cascade geometry and synthetic jet parameters

$$\begin{cases} u_{wall} = V_{ex} \cdot \cos(2\pi f_e t) \cdot \cos \alpha \\ v_{wall} = V_{ex} \cdot \cos(2\pi f_e t) \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad (4)$$

2.2 程序校核

程序可靠性验证在数值模拟中具有十分重要的地位. 图3为平面叶栅实验稳态测得的叶栅压力系数与本文所用程序计算得到的时均结果对比. 如图所示, 计算结果和实验结果总体来说吻合得比较好, 说明程序是可靠的. 但也存在一些差别, 在 $i = 10$ 时, 叶背 30% 弦长之后计算值要略低于实验值, 其主要原因: ①简化模型不同. 尽管平面叶栅是非转动件, 三维效应较弱. 但与计算中严格的二维模型比较起来, 端壁效应仍不可忽略. 因此, 计算模型与实际实验所对应的数学物理定解条件存在差别. ②对于非定常流场数值模拟所得流动参数的时空平均顺序以及加权方式, 对流场描述有直接影响. 尤其在分离较明显的流场中, 不同的数据后处理方式得到的结果差异已经不能忽略^[13]. 本文采用了先对计算基本量进行时间平均, 再采用质量平均加权平均的方法推导出流场导出量, 然后进行空间平均, 最终得到流场描述参数.

2.3 涡面捕捉方法

首先求解 Navier-Stokes 方程组, 得到不同时刻 2-D 扩压叶栅流场的速度分布和涡量分布. 然后, 根据式(1)确定涡面的空间位置, 再由式(2)得到涡面密度 γ .

本文的涡面捕捉方法, 不同于利用 Biot-Savart 方程的离散涡法. ①最根本的区别在于: 离散涡方法是 Lagrange 系下的质点跟踪, 从面涡的起

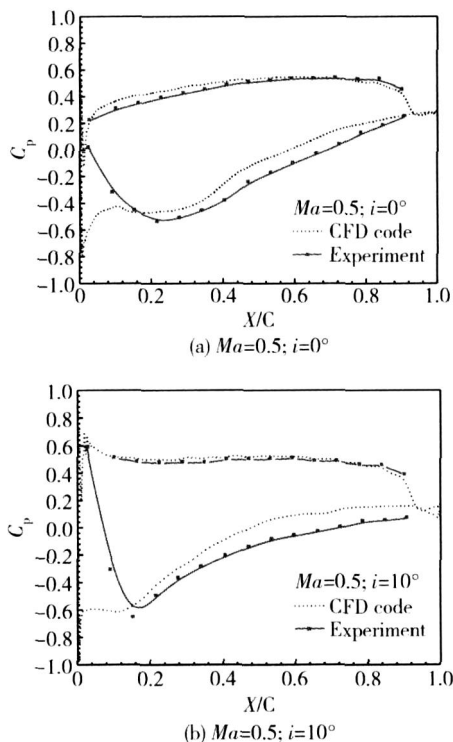


图 3 压力系数的计算值与平面叶栅稳态测量值的比较
Fig. 3 Comparisons of C_p on profile surface between the simulation results and steady measurements
($Ma = 0.5, i = 10^\circ$)

始到发展的全过程都可追踪;本文是在 Euler 系下,固定空间位置,虽无法跟踪研究确定的涡面,但却可方便得到流场空间结构的演化;②由于是先有全部流场信息,再求涡面时空分布,从这个意义上来说,本文的涡面捕捉方法为离散涡方法的逆过程。

3 结果及分析

由轴流压气机流动的速度三角形可知,叶栅攻角变化对应着流量变化。当攻角增大到一定程度时,压气机进入失稳状态。因此,在叶栅流动数值模拟中增加攻角,对应着轴流压气机的工作状态逐渐向非稳定边界靠拢。本文固定进口 $Ma = 0.5$, 计算攻角 $i = 0^\circ, 6^\circ, 10^\circ$ 时的叶栅流动情况,分析流场时空结构同叶背非定常分离涡面之间的关系。

3.1 时均流场

本文通过时均流场,考查叶背分离涡面与流场空间结构的联系。

首先研究叶栅流动性能参数所反映的流场空间结构。从图 4 中的总压损失曲线可以看出,随着叶栅来流攻角增加,叶栅通道内 ($0 < X/C <$

0.937) 流动损失增大。 10° 攻角时,叶片靠前部分 ($X/C < 0.5$), 前缘剪切层非常强烈,造成这部分区域分离涡面损失增加最快。由图 5 静压比曲线可知, $i = 0$ 时,叶栅通道内基本都是增压过程;当 $i = 6$ 和 10 时,大约在 $50\%C$ 处开始出现分离。

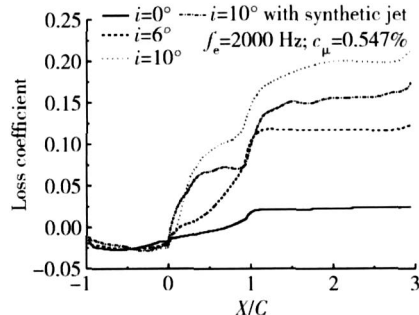


图 4 时均流场叶栅总压损失系数沿流向分布
($Ma = 0.5$)

Fig. 4 Total pressure loss coefficient of streamwise sections in time-mean flowfield ($Ma = 0.5$)

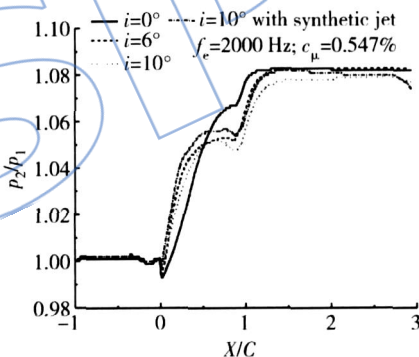


图 5 时均流场叶栅静压比沿流向分布 ($Ma = 0.5$)
Fig. 5 Ratio of static pressure of streamwise sections in time-mean flowfield ($Ma = 0.5$)

再分析叶背分离涡面与流场空间结构的关系。根据本文第一部分对于涡面的数学物理描述,结合不同攻角下叶背分离涡面在叶栅通道中时均流场中的相对位置(见图 6),可以得到以下重要结论:

- 1) 分离涡面的空间位置随着叶栅来流攻角的增加而逐渐远离叶背,因此,涡面和叶背间的距离可以作为分离区大小的尺度;
- 2) 从等 Ma 图可以看出,叶背分离涡面基本是时均流场中高速区与低速区的分界面;
- 3) 在本文所有计算攻角下,分离涡面均表现为涡量集中区域的中心线,可见涡面上的涡量绝对值最大。

涡面密度 γ 是涡面两侧的切线速度差,代表涡面强度。 0 攻角时,由于叶背边界层没有分离,

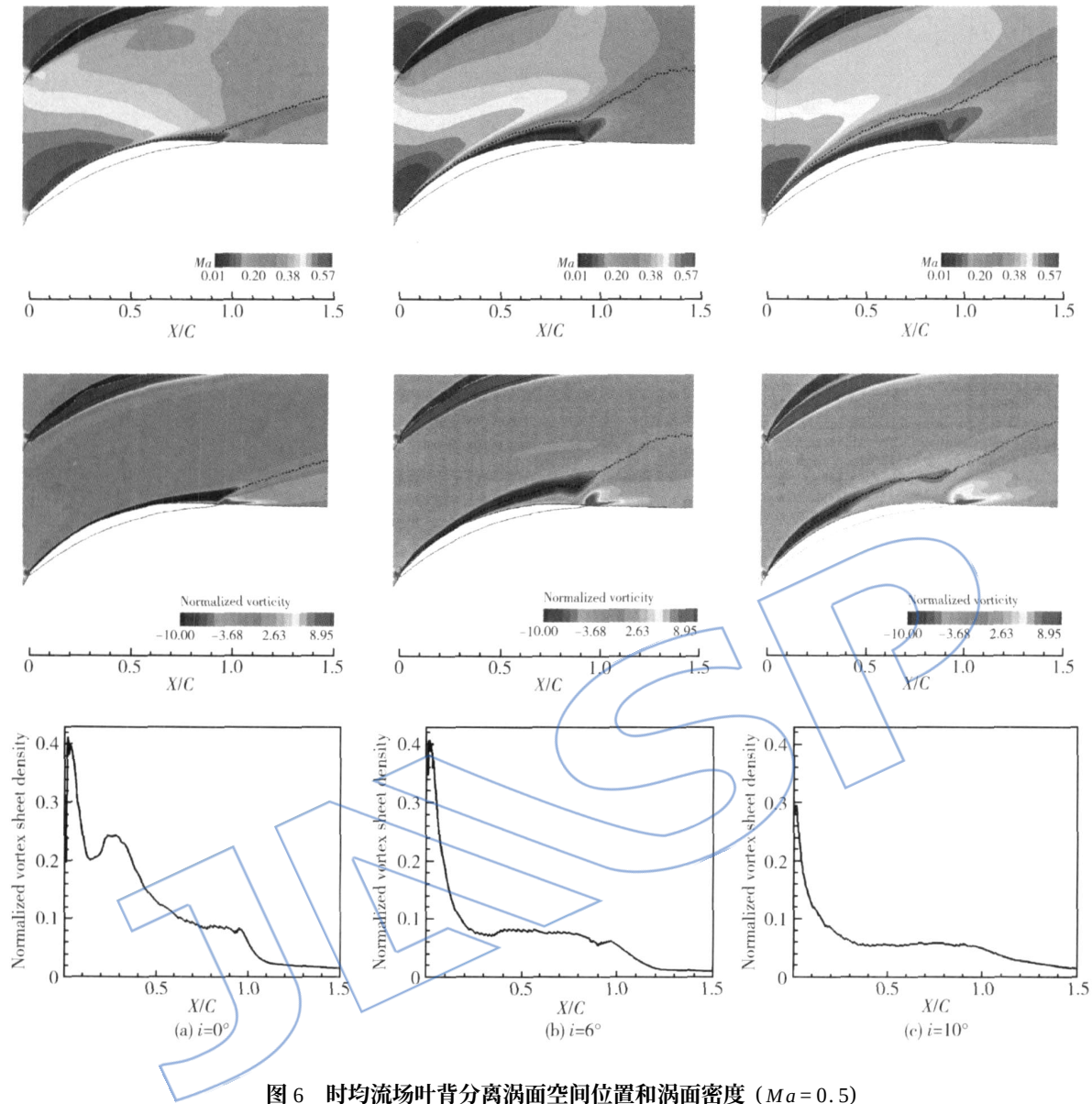


图 6 时均流场叶背分离涡面空间位置和涡面密度 ($Ma=0.5$)
Fig. 6 Time-mean plots for unsteady vortex sheet and its corresponding density ($Ma=0.5$)

在壁面粘性作用下,在边界层内会产生很大的负涡量,形成附体涡面. 10°攻角时,由于分离的出现,近壁面出现倒流,涡面远离壁面,形成分离涡面. 与附体涡面相比,分离涡面增大,涡面密度 γ 减小. 如图 6 中所示,相对于图 6(c) 中的分离涡面来说,在 $X/C>0.937$ 之后,图 6(a) 与 (b) 中的 γ 迅速趋于零. 这是因为,在 0° 和 6° 攻角下,气流一旦离开叶片,形成自由涡面,壁面形成附体涡面很快减小,涡面密度随之迅速减弱.

3.2 非定常涡面与流场时空结构分析

图 7 所示为 10° 攻角下,叶栅前缘剪切层脱落涡一个周期之内的叶背非定常涡面空间演化过程. 叶背分离涡面的位置在流场中时刻保持振荡,从等涡量图容易看出,涡面的振荡与前缘剪切层

产生的非定常涡脱落直接相关. 涡面总是在脱落涡的涡心位置出现. 由等 Ma 图可知,涡面总是存在于流场中高速区与低速区之间梯度最大处.

涡面在流场中的振荡是其显著的非定常特征. 考虑流向四个位置(距叶片前缘 3% C , 50% C , 96% C 和 110% C),分别在时均分离涡面上、时均涡面内外两侧选取点 A~J(见图 8),逐一对这 10 个空间位置的总压时序值进行 FFT 分析. 在 $i=10^\circ$ 工况下,得到下列频谱特征:

叶片前缘附近,位于时均涡面内侧的 A 点 ($y^+=220$),存在明显的单一占优频率 825 Hz. 与其相邻的涡面外侧 B 点 ($y^+=560$) 则没有显著的振荡频率,总压脉动幅值也比 A 点处低一个量级. 可见,在叶片前缘,涡面内侧流体以 825 Hz 振

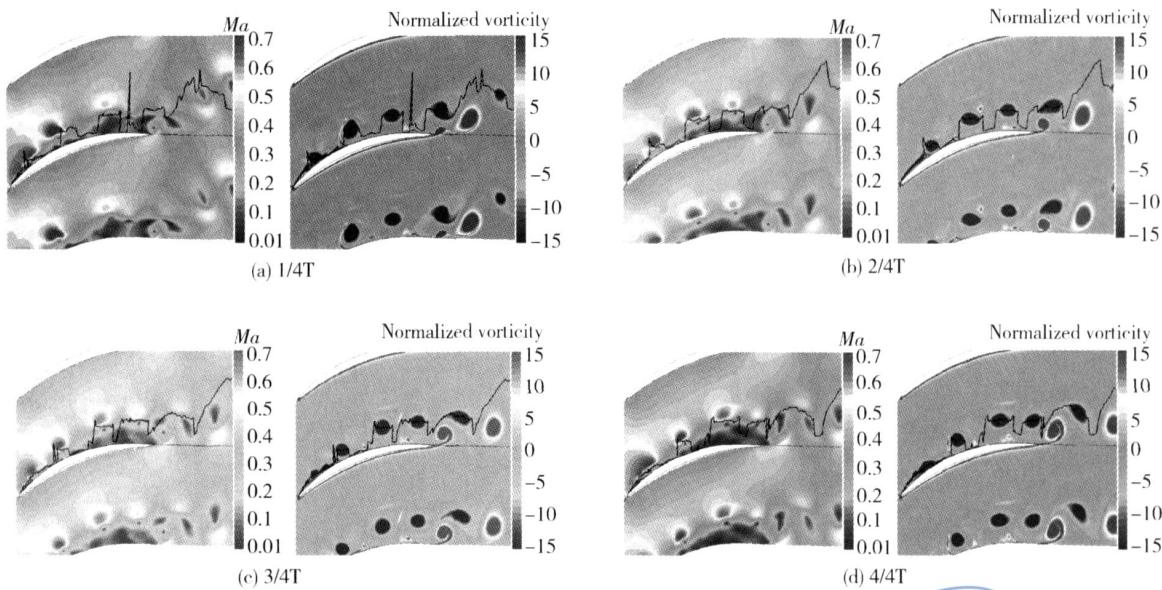


图 7 叶背分离涡面演化与 Ma 数和涡量等值图 ($Ma=0.5, i=10^{-3}$)

Fig. 7 Instantaneous plots for unsteady vortex sheet , which plus Ma and vorticity contours , respectively ($Ma=0.5, i=10^{-3}$)

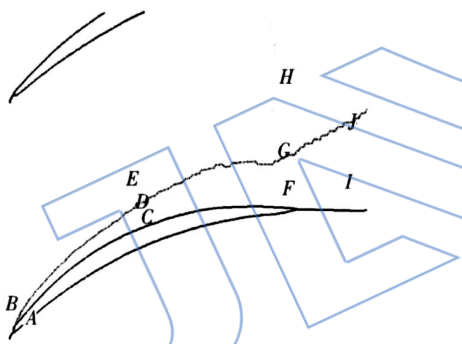


图 8 总压频谱分析点分布图

Fig. 8 Position of points for spectrum of total pressure

荡,而涡面外侧的主流区几乎没有明显的不稳定波动.叶片中部,时均涡面内靠近叶背的 C 点上,有 3 个幅值相当的频率较突出(825,2 036,3 631 Hz),幅值同量级的其他频率众多;时均涡面上的 D 点较之 C 点,各频率的幅值均被放大,与略微占优的 3 个频率(825,2 036,3 631 Hz)之间的差别缩小,总压振荡信号杂乱;涡面外的 E 点,流场基本没有振荡.尾缘区涡面内的 F 点,处于叶背分离涡面和尾缘卷起涡的共同作用下,两个频率(1 210,1 431 Hz)的振荡幅值稍大,其他幅值同量级的频率也很多;涡面上的 G 点,总压振荡幅值提高,脉动也更强烈,1 210 Hz 最明显,500~1 200 Hz 频段的振荡幅值被明显放大;在远离涡面且靠近叶栅出口截面中部的 H 点,各振荡幅值迅

速减弱.在大尺度分离区内 I 点上,存在多个幅值不大的频率,1 375 Hz 略明显;在涡面上的 J 点,同样是 500~1 200 Hz 频段的振荡幅值略被放大,多频率共存.

以上总压频谱特征说明:①叶栅在大攻角流动下,产生的非定常涡面运动非常复杂,难以用固定的基频及谐频来描述涡面运动;②在涡面与固壁之间,旋涡相互作用是个多模态系统.各模态频率的振荡幅值随着远离壁面而被放大,直至分离涡面处,流场在分离涡面外侧的主流区内几乎没有明显的振荡.

类似用流场中某点的速度相图说明流场的无序程度^[2],也可以把涡面在多个周期内的空间位置做成一张涡面时空轨迹图,如图 9 所示.由于涡面在空间上代表了分离涡的位置,这样,涡面轨迹图就可表示分离流场的时空结构.

3.3 利用非定常涡面模型分析流场时空结构变化

合成射流作为基于旋涡运动的零质量射流,是流动控制领域近年来最活跃的主动控制技术之一.本文不对合成射流对流场的控制机理展开分析,而是把合成射流作改变流场的一个激励因素,讨论通过叶背分离涡面模型来反映出流场的时空结构变化.

进口 10° 攻角下,在叶栅吸力面前缘点附近施加法向合成射流激励,激励位置如图 2 所示,激励点中心距离前缘点距离为 $l=4.6\%C$,射流孔

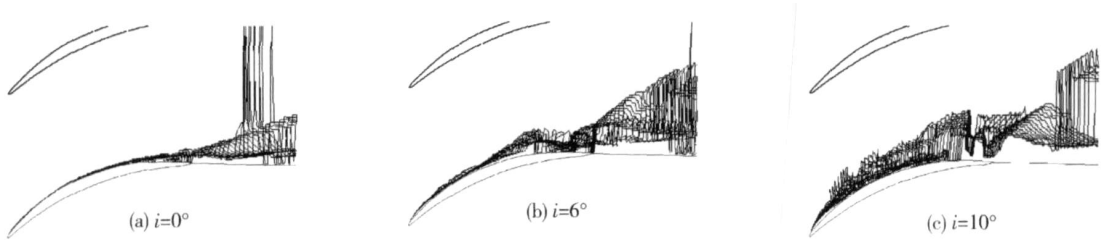


图 9 不同攻角下的叶栅分离涡面轨迹 ($Ma=0.5$)

Fig. 9 Tracks of unsteady vortex sheet of different times ($Ma=0.5$)

宽度 $h=1.7\%C, V_{ex}=40\%U_\infty, f_e=2\,000\text{ Hz}$. 射流动量系数 $c_{\mu}=h\rho V_{ex}^2/(1/2\rho U_\infty^2)=0.547\%$, U_∞ 为叶栅进口速度.

由图 4 可知,施加叶背射流激励后,流场总压损失显著降低.从图 10 的非定常涡面轨迹来看,激励后涡面更靠向叶背,分离区减小.激励后,时均涡面密度在 $50\%C$ 之前有所降低, $50\%C$ 之后

却得到增强.可见,激励后,分离涡强度略有提高,但分离区空间尺度却减小,更靠近壁面,流场显得更为有序.激励同样使尾迹空间尺度减小,尾迹变得更集中.尾迹涡面密度增大,尾迹亏损变得更强.进一步通过速度值的时域分析,得到流场各处都以 $2\,000\text{ Hz}$ 频率脉动.

由总压时域分析可得,未施加激励前由于前

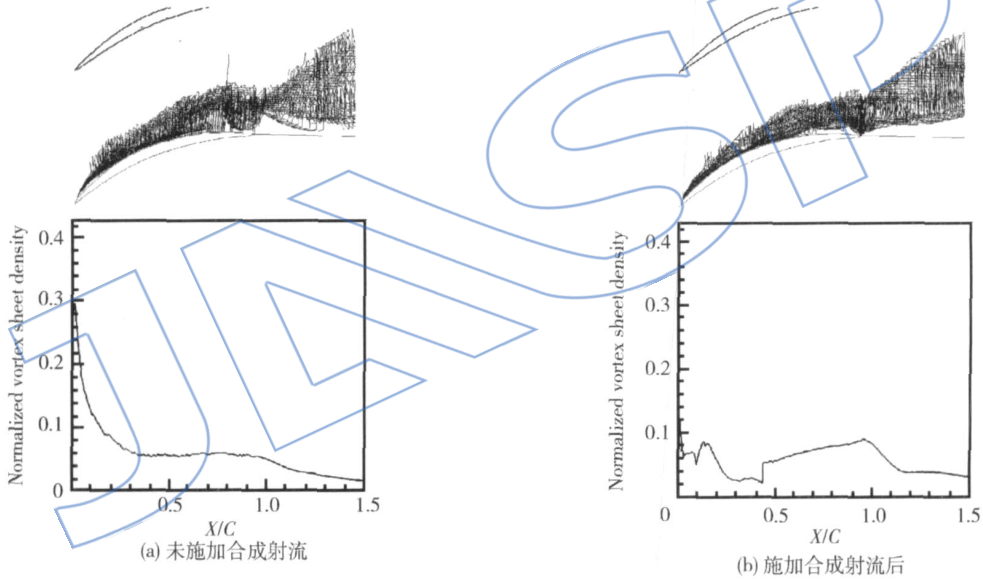


图 10 分离涡面轨迹和时均涡面密度分布 ($Ma=0.5, i=10^\circ$)

Fig. 10 Tracks of unsteady vortex sheet of different times and its corresponding time-mean density ($Ma=0.5, i=10^\circ$)

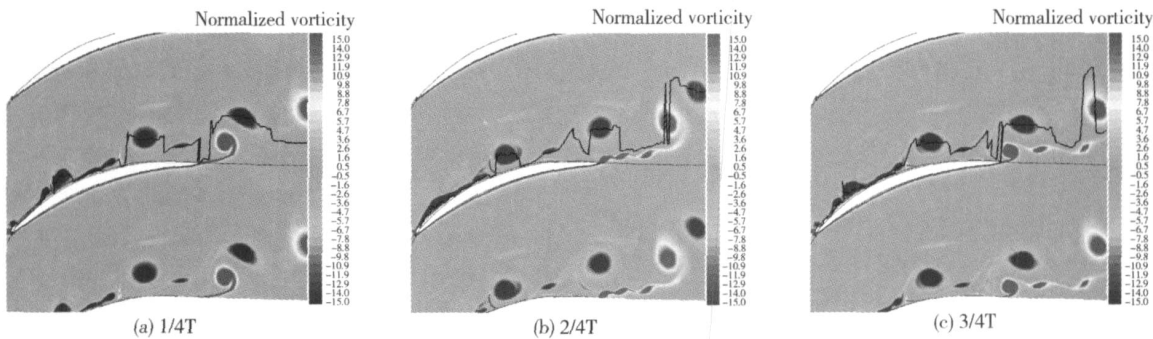


图 11 施加法向合成射流后的叶背分离涡面演化与涡量等值线图 ($Ma=0.5, i=10^\circ$)

Fig. 11 Instantaneous plots for unsteady vortex sheet plus vorticity contours with synthetic jet normal to the suction surface of the cascade ($Ma=0.5, i=10^\circ$)

缘和尾缘剪切层不稳定性导致的旋涡随机自由脱落的时空结构被施加的合成射流所控制,脱落涡开始按照激励频率 f_e 脱落.流场按照激励频率振荡.由一个合成射流周期内的涡面演化(图11)可以看出,激励后,流场中大量的离散小旋涡数量减少,被更强更有规律的少量涡所代替,这与涡面分析得到的结论是一致的.

4 结 论

研究轴流压气机内部真实流动的途径之一是对相对旋转的多叶片排非定常旋涡流动的时空结构进行分析.本文作为初步研究,针对2-D扩压叶栅流动,提出非定常涡面简化模型,并用这一模型对流场的时空结构进行分析,得到以下结论:

1) 考虑粘性的实际流体中,由于剪切作用而产生的一类速度间断层为涡面,不同于激波强间断,涡面是一类剪切层,是速度的弱间断层.

2) 叶背分离涡面是流场高速主流区与低速分离区的分界面,同时也是涡量最集中区域.涡面密度在叶片前缘最大,随着涡面向下游的发展增厚,涡面密度逐渐降低.

3) 分离涡面在流场中的振荡与前缘剪切层的不稳定性直接关联.它非常复杂,很难用固定的基频和谐频来描述.在涡面与固壁之间,旋涡相互作用是个多模态系统.各模态频率的振荡幅值随着远离壁面而被放大,直至分离涡面处,流场在分离涡面外侧的主流区内几乎没有明显的振荡.

4) 非定常涡面时空轨迹图可定性地代表流场的时空结构.

5) 施加合成射流后,分离涡面更靠向叶背,分离区空间尺度减小.涡面密度普遍增大.涡面按照合成射流频率振荡.

分离涡面简化模型能够反映的流场时空结构的主要特征.此涡面简化模型可以直接扩展到对二维多叶片排间干扰复杂流场的时空结构分析上,为进一步研究叶轮机叶片排间干扰的复杂流场时空结构提供分析工具.

参考文献:

[1] 张涵信. 分离流与旋涡运动的结构分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005: 2-4.
ZHANG Hanxin. Structural analysis of separated flows

and vortex motion[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2005: 2-4. (in Chinese)

- [2] Wu J Z, Lu X Y, Denny A G, et al. Post-stall flow control on an airfoil by local unsteady forcing[J]. J. Fluid Mech., 1998, 371: 21-58.
- [3] Gursul I. Review of unsteady vortex flows over slender delta wings[J]. Journal of Aircraft, 2005, 42(2): 299-319.
- [4] Zhou S, Zheng X Q, Hou A P, et al. J. Interaction of unsteady separated flow over multi-bodies moving relatively in the same flow field[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 288, Issues 4-5: 981-1009.
- [5] Johnson I A, Bullock R O. Aerodynamic design of axial flow compressors[R]. NASA SP-36, 1965.
- [6] Adamczyk J J. Aerodynamic of multistage turbomachinery flow in support of aerodynamic design[R]. ASME 99-GT-80, 1999.
- [7] 普朗特 L, 奥斯瓦提奇 K, 维格哈特 K 著. 流体力学概论[M]. 郭永怀, 陆士嘉, 译. 北京: 科学出版社, 1981.
Prandtl L, Oswatitsch K, Wieghardt K. Brief introduction to fluid mechanics[M]. Translated by GUO Yong-huai, LU Shijia. Beijing: Science Press, 1981. (in Chinese)
- [8] 吴介之, 马晖扬, 周明德. 涡动力学引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993: 494-511.
WU Jiezhi, MA Huiyang, ZHOU Mingde. Introduction to vorticity and vortex dynamics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1993: 494-511. (in Chinese)
- [9] 童秉纲, 张炳暄, 崔尔杰. 非定常流与涡运动[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993: 131-141.
TONG Binggang, ZHANG Bingxuan, CUI Erjie. Unsteady flows and vortex motion[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1993: 131-141. (in Chinese)
- [10] Mokry M. Numerical simulation of aircraft trailing vortices interacting with ambient shear or ground[J]. Journal of Aircraft, July-Aug. 2001, 38: 636-643.
- [11] Shen M Y, Niu X L, Zhang Z B. The three-point fifth-order accurate generalized compact scheme and its applications[J]. Acta Mechanica Sinica, 2001, 17(2): 142-150.
- [12] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. Journal of Computational Physics, 1992, 103: 16-42.
- [13] 侯安平. 叶轮机非定常流动研究方法的初步探索[R]. 北京: 北京航空航天大学博士后研究报告, 2005: 14-20.
HOU Anping. Exploration on method of studying unsteady flow in turbomachinery [R]. Beijing: A Report Presented to Beihang University for Finishing of Post Dr., 2005: 14-20. (in Chinese)